Matemática Discreta – Notas de Aula

Aviso: Essas notas de aula tem por finalidade orientar o ***professor*** *no encaminhamento das aulas, a fim de não deixar assuntos fora da ordem planejada. A leitura deste material não reduz a necessidade de leitura da bibliografia recomendada. Última atualização em 09/03/09.*

1 Introdução à Lógica Formal

Lógica: pensar organizado e cuidadoso que caracteriza uma atividade racional [1]. A lógica é intuitiva, quando algo é simples, dizemos: *é logico*.

Lógica formal: trata dos conceitos e raciocínios independentemente de seu conteúdo [2], *formaliza* argumentos e afirmações.

Proposição: sentença afirmativa que pode ser avaliada como *verdadeira* ou *falsa*.

Proposições	Não proposições
Cinco é maior que dois.	Bom dia!
Está chovendo agora.	Qual o seu nome?
Branco é a cor mais bonita.	Complete o tanque, por favor.
Eu quero beber água.	Venha aqui.

Os valores *verdadeiro* e *falso* são comumente denotados por V e F ou por 1 e 0.

Proposições são abundantes na Ciência. As pessoas investigam, constroem explicações, fazem propostas e registram isso tudo principalmente sob a forma de proposições. Proposições são avaliadas sob a ótica da lógica.

Usa-se lógica para *provar a corretude* de programas. O funcionamento de circuitos eletrônicos pode ser formalizado através de lógica.

1.1 Conectivos Lógicos

Proposições podem ser agrupadas formando proposições compostas. Usamos conectivos para isso.

Símbolo	Nome	Uso
$\wedge$	conjunção (e)	$A \wedge B$
$\vee$	disjunção (ou)	$A \vee B$
' (ou $\neg$ ou ~ ou $\overline{}$)	negação (não)	A' (ou $\neg$A ou ~A ou $\overline{A}$)
$\rightarrow$	implicação / condicional (se ... então)	$A \rightarrow B$

Na proposição $A \rightarrow B$, chamamos A de antecedente e B de conseqüente. Dizemos que $B \rightarrow A$ é a recíproca de $A \rightarrow B$.

1.1.1 Fixação

Equivalência lógica: $A \leftrightarrow B \equiv A \rightarrow B \wedge B \rightarrow A$

Transformar as proposições a seguir em proposições mais simples. Usar os símbolos dos conectivos.

1. Se a chuva continuar, então o rio vai transbordar.
2. Os abacates só estão maduros quando estão escuros e macios.
3. Júlia gosta de manteiga mas detesta creme.
4. O crescimento sadio de plantas é conseqüência de quantidade suficiente de água.

5. Serão introduzidos erros apenas se forem feitas modificações no programa.
6. Se meu cliente fosse culpado, a faca estaria na gaveta. Ou a faca não estava na gaveta ou João viu a faca. Se a faca não estava lá no dia 10 de outubro, segue que João não viu a faca. Além disso, se a faca estava lá no dia 10 de outubro, então a faca estava na gaveta e o martelo estava no celeiro. Mas todos sabemos que o martelo não estava no celeiro. Portanto, senhoras e senhores do júri, meu cliente é inocente [1].

Escrever a negação das proposições a seguir:

1. O processador é rápido, mas impressora é lenta.
2. O processador é rápido ou a impressora é lenta.
3. Se o processador é rápido então a impressora é lenta.
4. Ou o processador é rápido e a impressora é lenta, ou então o arquivo está danificado.
5. Se o arquivo não está danificado e o processador é rápido, então a impressora é lenta.
6. A impressora só é lenta se o arquivo estiver danificado.

1.2 Tautologia

Proposições que são verdadeiras somente pela forma (sem considerar o conteúdo) são chamadas de *tautologias*.

1.3 Quantificadores

As proposições tem expressividade limitada. Precisamos formalizar generalizações e especializações. Ao quantificar elementos, precisamos de um contexto (conjunto universo não vazio). Quantificadores vem acompanhados de predicados (propriedades).

- quantificador universal: $\forall$ ex.: $(\forall x)(x>0)$ $(\forall x)P(x)$
- quantificador existencial: $\exists$ ex.: $(\exists x)(x>)$ $(\exists x)P(x)$

1.3.1 Fixação

- É possível encontrar uma interpretação na qual, ao mesmo tempo, $(\forall x)P(x)$ seja verdadeiro e $(\exists x)P(x)$ seja falso?
- É possível encontrar uma interpretação na qual, ao mesmo tempo, $(\forall x)P(x)$ seja falso e $(\exists x)P(x)$ seja verdadeiro?

1.4 Predicados

Predicados podem ser unários, binários, ternários, ..., *n*-ários.

- $P(x) \rightarrow$ "x é verde"
- $Q(x,y) \rightarrow$ "x é menor que y"
- $R(x,y,z) \rightarrow$ "x + y = z"

Quantificadores podem ser agrupados. A ordem é importante. Considero o universo dos números inteiros.

- $(\forall x)(\exists y)Q(x,y) \rightarrow$ "para todo inteiro, existe um outro maior" $\rightarrow$ V
- $(\exists x)(\forall y)Q(x,y) \rightarrow$ "existe um inteiro menor que todos" $\rightarrow$ F

Podem aparecer constantes, de acordo com uma *interpretação*, que são geralmente valores ou nomes que não aparecem nos quantificadores.

- *interpretação* = universo + def. das propriedades + def. das constantes

Predicados com quantificadores e símbolos de agrupamento são chamados de *expressões*. O agrupamento identifica *escopo*.

- ex.: $(\forall x)((\exists y)[P(x,y) \wedge Q(x,y)] \rightarrow R(x))$

1.4.1 Fixação

Escreva uma expressão para:

- todos os cachorros perseguem todos os gatos
- alguns cachorros perseguem todos os gatos

1.5 Validade

Expressões que são válidas em todas as interpretações possíveis são *validades*. Essas expressões são verdadeiras para todos (os infinitos) casos e assim são válidas somente pela sua forma.

Exemplos de validade:

- $(\forall x)P(x) \rightarrow (\exists x)P(x)$
- $(\forall x)P(x) \rightarrow P(a)$, onde *a* é uma constante.
- $(\forall x)[P(x) \wedge Q(x)] \leftrightarrow (\forall x)P(x) \wedge (\forall x)Q(x)$
- $P(x) \rightarrow [Q(x) \rightarrow P(x)]$

1.5.1 Fixação

A expressão $(\forall x)[P(x) \vee Q(x)] \rightarrow (\forall x)P(x) \vee (\forall x)Q(x)$ é uma validade?

2 Técnicas de Demonstração

Com freqüência, precisamos mostrar que determinadas afirmações são verdadeiras em um contexto. Até que se prove, a afirmação é uma conjectura. Se provada, a afirmação é um teorema.

Mostramos que uma conjectura é falsa através de um contra-exemplo.

As conjecturas são geralmente implicações, ou seja, afirmações na forma $P \rightarrow Q$. Bicondicionais ($P \leftrightarrow Q$) são geralmente demonstradas pelas duas condicionais em questão.

2.1 Demonstração por exaustão

Provar usando exemplos funciona desde <u>todos</u> os casos tenham sido analisados. Isso é inviável em universos grandes e impossível em universos infinitos, mas pode ser uma técnica útil para universos pequenos.

Pode-se fazer uma tabela com a análise de cada caso, como por exemplo, uma *tabela-verdade*.

2.2 Demonstração direta

A demonstração direta é produzida pela transformação passo a passo de um fato numa conjectura ou de um antecedente num conseqüente. Essa técnica pode ser chamada de dedução.

Para provar que $P \rightarrow Q$ podemos reescrever repetidamente P, usando tautologias, validades, hipóteses auxiliares (fatos conhecidos), etc. Vamos alterando P passo a passo até que se transforme em Q.

2.2.1 Fixação

- Prove que $(\forall x)(\forall y)$(x é um inteiro par $\wedge$ y é um inteiro par $\rightarrow$ o produto xy é um inteiro par)
- Prove que se um inteiro é divisível por 6, então duas vezes esse inteiro é divisível por 4.
- Prove que a soma de três inteiros consecutivos é divisível por três.

2.3 Demonstração por contraposição

Para provar $P \rightarrow Q$, podemos provar $Q' \rightarrow P'$ pois $(Q' \rightarrow P') \rightarrow (P \rightarrow Q)$. $Q' \rightarrow P'$ é chamada de contrapositiva de P → Q.

2.3.1 Fixação

- Encontre a contrapositiva de:
  - Se *n* é primo, então *n = 2* ou *n* é ímpar.
  - Se um político não tem muito dinheiro, então ele não pode ganhar as eleições.
- Prove que se o quadrado de um inteiro é ímpar, então o inteiro é ímpar.
- Prove que se *n+1* senhas diferentes forem distribuídas para *n* alunos, então algum aluno recebe duas ou mais senhas.
- Prove que o produto *xy* é ímpar se e somente se *x* e *y* são inteiros ímpares.

2.4 Demonstração por absurdo

Também chamada de demonstração por contradição. Consiste em supor a hipótese e a negação da conclusão, e tentar extrair uma contradição disso. Mais formalmente, mostrar que (P ∧ Q' → 0).

Sugere-se que a demonstração por absurdo seja tentada após a demonstração direta e a demonstração por contraposição para evitar contradições do tipo (Q ∧ Q') ou (P ∧ P'), em que na verdade, aconteceu uma demonstração em uma dessas formas anteriores.

2.4.1 Fixação

Demonstre que:

- Se um número somado a ele mesmo é igual a ele mesmo, então esse número é zero.
- $\sqrt{2}$ não é um número racional (um número racional pode ser colocado na forma *p/q*, onde *p* e *q* são inteiros, $q \neq 0$, e *p* e *q* não têm fatores comuns).

2.4.2 Fixação de todas as técnicas de demonstração anteriores

Prove ou encontre um contra-exemplo:

- O número *n* é um inteiro par se, e somente se, *3n+2* é um inteiro par.
- Se *n* é um inteiro par, $4 \leq n \leq 12$, então n é uma soma de dois número primos.
- O produto de quaisquer três inteiros consecutivos é par.
- A soma de quaisquer três inteiros consecutivos é par.
- Qualquer inteiro positivo pode ser escrito como a soma dos quadrados de dois inteiros.

2.5 Demonstração por indução

Bibliografia

1: Judith L. Gersting, Fundamentos Matemáticos para a Ciência da Computação, 2004
2: , MICHAELIS: moderno dicionário da língua portuguesa, 1998